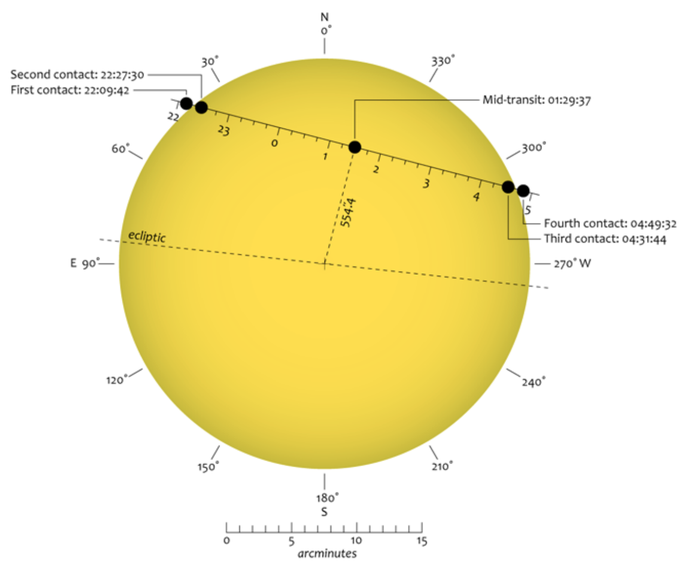
Midiendo la Distancia al Sol usando el Tránsito de Venus

David Rodríguez (Universidad de Chile)

Con el tránsito de Venus el 5 de junio de 2012, astrónomos alrededor del mundo están coordinando grupos para medir la distancia al Sol. Hay varios métodos para hacer esto, por ejemplo usando la duración del tránsito completo y tomando imágenes. Aquí describo un método que solo requiere medir el tiempo de ingreso interior o egreso interior en dos lugares de la Tierra. Este método es conveniente, ya que en la Isla de Pascua solo veremos el comienzo (ingreso) del tránsito.

Que es el ingreso interior?

Aquí hay un diagrama que lo explica todo:



Aquí puedes ver la trayectoria que Venus tomará a través del Sol. Hay cuatro puntos de contacto: el primer contacto, cuando Venus toca el disco del Sol; segundo contacto, cuando Venus está completamente dentro del disco; tercer contacto, cuando Venus está justo saliendo del disco; y el cuarto contacto, cuando Venus acaba de salir del disco del Sol.

Existe otro término técnico para estos puntos de contacto. Los primeros dos puntos son *ingreso* porque Venus está moviéndose hacia el Sol, igualmente los dos puntos finales son *egreso* ya que Venus está saliendo del disco del Sol.

Los puntos más lejanos del sol son puntos *exteriores* (*ingreso exterior*/*egreso exterior*) y los que están justo adentro del Sol son, no sorprendentemente, puntos *interiores*.

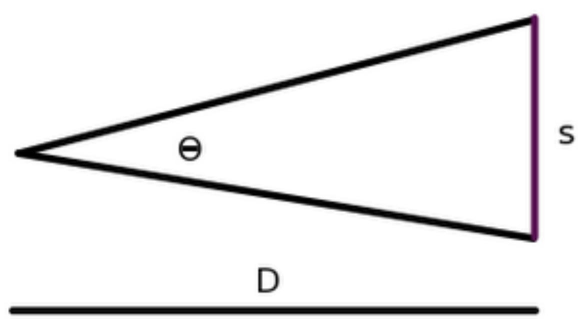
Cuando referimos a *ingreso interior*, estamos hablando acerca del segundo punto de contacto. *Egreso interior* es el tercer punto. Este método requiere una medida precisa del tiempo cuando ingreso interior o egreso interior ocurre.

Ahora, la Matemática

Para entender cómo medimos la distancia al Sol necesitamos revisar un poco de matemática. Es solamente geometría y álgebra básica. Si quieres mejor saltar al resultado, puedes ver la sección "El Resumen"

Imagina un círculo gigante de radio D y un pequeño arco (s) en su borde. Como puedes ver abajo, este arco cubre un ángulo θ:

Matemáticamente, podemos expresar esto como $s = \theta D$. En otras palabras, si



conoces el largo s y el ángulo θ puedes calcular cual es la distancia D. Esto también funciona para velocidades: $v = \omega D$, donde ω es la velocidad angular.

Estos conceptos básicos forman la base para nuestro método.

Considera el movimiento de la Tierra mientras se mueve dentro de la sombra de Venus visto desde el Sol. En ingreso exterior, la Tierra está solo tocando la sombra (en la Tierra vemos a Venus tocando el disco del Sol). En ingreso interior, ya la Tierra está completamente dentro de la sombra y el tránsito está en proceso. No debe ser sorpresa que en este tiempo la Tierra se ha movido un diámetro entero (2 radio de la Tierra: $2*R_E$). Entonces, tenemos:

$$2\ R_E = D\ \theta$$

con D ahora siendo la distancia entre el Sol y la Tierra.

El ángulo θ puede ser difícil de medir, así que en vez vamos a usar el movimiento angular y el tiempo (Δt) entre ingreso exterior e interior:

$$2 R_E = D \omega \Delta t \quad \text{o reordenando: } D = 2 R_E / \Delta t \; * 1/\omega$$

Si medimos el tiempo Δt podemos estimar la distancia al Sol ya que sabemos el radio de la Tierra y la velocidad angular.

Sobre la velocidad angular: lo que necesitamos no es solo la de la Tierra, sino la velocidad relativa entre Venus y la Tierra (ya que ambos se están moviendo). Sabemos cuan largo es un año para ambos planetas y esto corresponde a la cantidad de tiempo para cubrir un circulo entero, o sea 2π radianes. Entonces, la velocidad angular para un planeta es solo $\omega = 2\pi / P$, donde P es el periodo (la duración de un año).

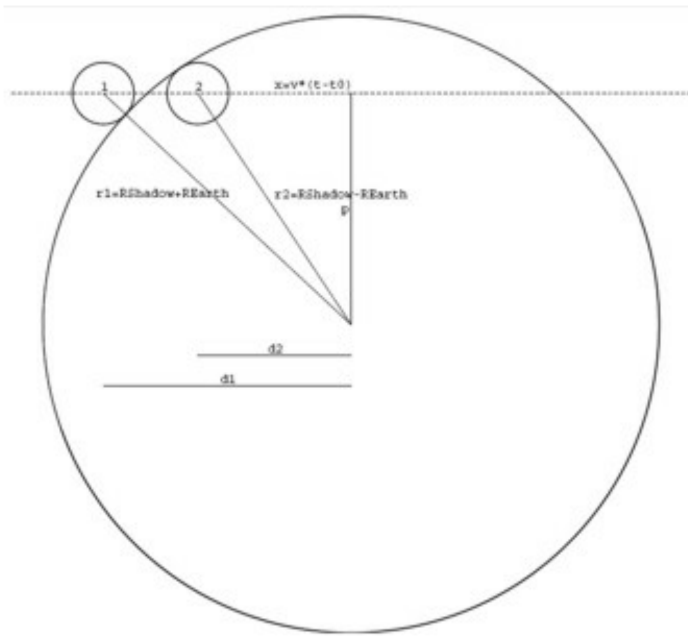
Para Venus, esto es 3.2364E-7 radianes por segundo, y para la Tierra, 1.992E-7 radianes por segundo. Usamos aquí la notación científica, o sea: 1E2 = $1*10^2$ = 100 y 1E-2=$1*10^{-2}$ = 0.01.

El movimiento angular relativo que necesitamos es la diferencia: 1.244E-7 radianes por segundo.

Nota que en práctica las órbitas no son círculos perfectos, pero esto es suficiente por ahora.

Un Factor de Corrección

La relación que derivamos seria perfecta si la Tierra entrara en la sombra de Venus por el medio. Pero en practica no lo hace y tenemos que añadir un factor de corrección. Aquí hay un diagrama de lo que ocurre:



En esta figura, el circulo pequeño es la Tierra en el primer y segundo punto de contacto y el circulo mayor es la sombra de Venus a la distancia de la Tierra.

La variable r corresponde a la verdadera separación entre el centro de la sombra y el centro de la Tierra mientras que d corresponde a la proyección horizontal de esta distancia (en la dirección del movimiento de la Tierra). La variable p es la separación vertical entre la trayectoria y el centro de la sombra. Como estos son triángulos rectos, esto aplica:

$$r^2 = p^2 + d^2$$

La distancia r1, por ejemplo, es solo la suma del radio de la sombra (R_S) y el radio de la Tierra (R_E), mientras que r2 es la diferencia.

Recuerda que cuando la Tierra entra completamente en la sombra se ha movido una distancia horizontal $2 * R_E$. Más generalmente:

$$d1 - d2 = v \, \Delta t'$$

donde v es la velocidad ($v = \omega D$) y $\Delta t'$ es el tiempo entre los eventos 1 y 2.

Lo podemos combinar todos así:

$$
\begin{aligned}
d_1 - d_2 &= v\Delta t \\
d_1 + d_2 &= 2\sqrt{R_S^2 - p^2} \\
r_1 - r_2 &= 2R_S \\
r_1 + r_2 &= 2R_E
\end{aligned}
$$

Y usando estas relaciones derivar:

$$
\begin{aligned}
d_1^2 &= r_1^2 - p^2 \\
d_2^2 &= r_2^2 - p^2 \\
d_1^2 - d_2^2 &= r_1^2 - r_2^2 \\
(d_1 - d_2)(d_1 + d_2) &= (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \\
(v\Delta t)2\sqrt{R_S^2 - p^2} &= (2R_S)(2R_E) \\
\omega D\Delta t\sqrt{R_S^2 - p^2} &= 2R_S R_E
\end{aligned}
$$

$$
D = \frac{2R_S R_E}{\omega\Delta t\sqrt{R_S^2 - p^2}} = \frac{2R_E}{\Delta t}\frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{R_S}\right)^2}}
$$

Esta última línea se debe ver familiar: es la misma relación que antes pero con un factor adicional. El valor de p depende en los parámetros del evento. Para el tránsito del 5 de junio de 2012, p=0.5904 R_S y el factor de corrección es 1.23899.

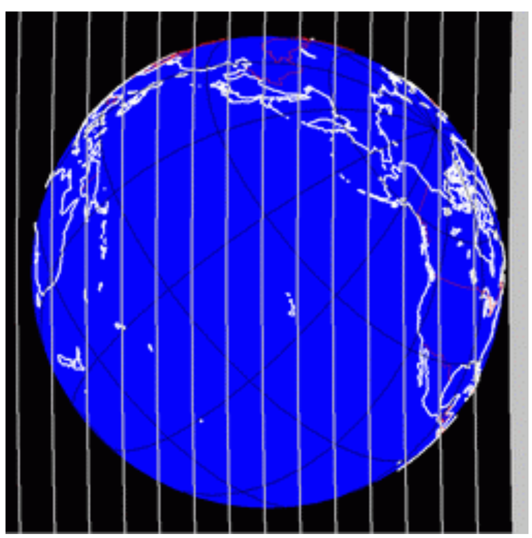
La Última Parte

Ya estamos listos para el final. Otra vez, el concepto es simple: la velocidad que la Tierra toma al cruzar la sombra es constante (v) y es dada por 2 $R_E/\Delta t$. Como es una constante, lo podemos medir en cualquier dos lugares separados por Δx: $v = \Delta x / \Delta t'$

Podemos re-escribir nuestra relación así:

$$D = \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{R_S}\right)^2}}$$

En este contexto, x es la distancia horizontal separando dos puntos mientras la sombra se mueve a través de ellos. Desafortunadamente, no es una simple comparación de longitudes. Esto es lo que ocurre:



La sombra de Venus esta moviéndose de la derecha a la izquierda en este diagrama y las líneas verticales representan valores constantes de x.

Calculando x dado la latitud y longitud no es complejo, pero su derivación sí lo es. Aquí esta la expresión final de cómo calcular x dadas la latitud (ϕ) y longitud (λ):

$$x = 0.4014 \cos\phi \cos\lambda - 0.5701 \cos\phi \sin\lambda + 0.7169 \sin\phi$$

Ahora tenemos todo lo necesario para calcular la distancia, vamos a resumirlo y dar un ejemplo.

El Resumen

Para calcular la distancia al Sol usamos la siguiente relación:

$$D = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{R_S}\right)^2}}$$

Sabemos la mayoría de los valores, así que los podemos poner:

$$D = 9.957 \times 10^6 R_E \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La separación Δx se puede calcular al computar x usando la latitud (ϕ) y longitud (λ):

$$x = 0.4014 \cos\phi \cos\lambda - 0.5701 \cos\phi \sin\lambda + 0.7169 \sin\phi$$

El tiempo Δt es la diferencia en tiempo, en segundos, entre el ingreso interior (o egreso interior) medido en dos lugares.

Un Ejemplo

Consideremos observadores en Hanga Roa, Isla de Pascua y Maui, Hawaii.

La latitud, longitud, y tiempo estimado de contacto (en hora universal) son los siguientes:

Lugar	Latitude	Longitude	Tiempo de Contacto 2
Isla de Pascua	-27.150	-109.4333	22:28:18
Hawaii	20.79836	-156.33193	22:27:38

Las distancias x para estos dos lugares son: 0.03 y 0.12 R_E.

Nota que la diferencia es pequeña y esto causa que el tránsito ocurra a casi el mismo tiempo. Esto se refleja en la diferencia del tiempo: Δt es solo 40 segundos. Dos observadores separados por un radio de la Tierra en x verían una diferencia de aproximadamente 7 segundos. La combinación de Hawaii y Isla de Pascua puede que no sea ideal, pero aun así funciona.

Uniendo todo vemos que $\Delta x/\Delta t$ es 0.00231 R_E/segundo y la distancia al Sol es 23,002 radios de la Tierra. El radio de la Tierra es 6367.5 km, así que nuestro estimado corresponde a una distancia de 146 millones de kilómetros.

La unidad astronómica (UA) es 150 millones de kilómetros. Entonces, nuestro estimado es de 0.9791 UA. Pero recuerda que la distancia entra la Tierra y el Sol no es constante dado que la orbita de la Tierra no es un circulo perfecto. Para esta fecha, vemos que la distancia debería ser 1.015 UA.

La diferencia entre nuestro estimado y el valor verdadero es de solo 4% --- excelente!

Una nota final: se pueden usar más de dos lugares. En este caso uno hace un gráfico de x contra t y busca la línea que mejor representa la data. La pendiente de la línea nos da $\Delta x/\Delta t$.